教育研究報告

# 数学的手法の意識化を図る教材開発について

## A Report of Developing Teaching Materials which Bring Out Diverse Ideas in Mathematics

中　込　雄　治
NAKAKOMI, Yuji

### 1．はじめに

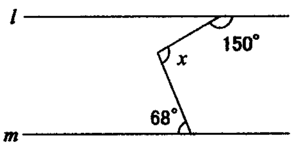
「解法は１つで、それを暗記することが数学の学習である」、多くの子ども達が数学の学習をこのように捉えている現状がある。そこでこのような閉塞的な学習観を払拭し、「いろいろな解法を自分なりにつくり出そう」という姿勢を培いたいと考えている。そのためには、多様な解法が存在する事例を示し、どのような数学的手法を用いればそうした多様な解法を引き出すことができるかを明らかにする必要がある。

本稿では、多様な解法を引き出す上で、解法間の「特殊と一般の関係」や「対の関係」に着目させるという手法が有効であることを示す。 またそうした手法を指導内容として組み込んだ教材の開発を試みる。

### 2．数学的手法の意識化を図る教材

次の【問題】は2005年の東京都立高校入試問題の改題である。元の問題文に「一通りではなく、いろいろな求め方を考えよ」という文言を付け加えたものとなっている。

**【問題】** 次の図で，$l \parallel m$ のとき，$x$ で示した角の大きさは何度か．一通りではなく，いろいろな求め方を考えよ．




まず【解法１】【解法２】を解法例として示した。これらは多くの子ども達が考えつく解法である。この【解法１】【解法２】では、平角・平行線の錯角・三角形の内角外角などの知識が使われている。

**【解法１】** 図１のように点Ｂを通り直線 $l$ に平行な直線 $n$ を引く．p＝180°－150°＝30°，q＝p＝30°（平行線の錯角），また，r ＝68°（平行線の錯角），よって，$x$ ＝ q ＋ r ＝30°+68°＝98°

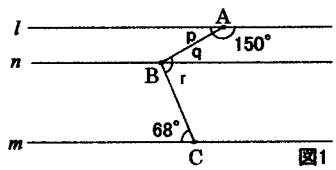


図1

**【解法２】** 図２のようにABを延長する．p＝180°－150°＝30°，p＝q＝30°（平行線の錯角），三角形の内角と外角の関係から，$x$＝q＋68°＝30°+68°＝98°

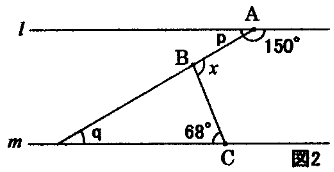


図2

さて、ここでこの【解法１】と【解法２】から多様な解法を引き出す手法を考えてみる。まずそれぞれの補助線に着目してみる。【解法１】の補助線（直線$n$）は「直線$l$に平行な点Ｂを通る直線」である。また【解法２】の補助線（直線ＡＢ）は「点Ａと点Ｂを通る直線」である。そこでこの２つの補助線からその共通項だけを含んだ「点Ｂを通る直線」に着

キーワード：教材開発、多様な考え方、角の大きさ
Key words ：Developing Teaching Materials, Diverse Ideas, Measure of an Angle

目すると、これを新たな補助線とする【解法３】のような解法を見出すことができる。

**【解法3】図3のように点Bを通る任意の直線$n$を引く．$p=180°-150°=30°$，$s=t$（平行線の錯角），三角形における内角と外角の関係から，$q=p+s=30°+s$、$r=68°-t=68°-s$，よって，$x=q+r=(30°+s)+(68°-s)=98°$**

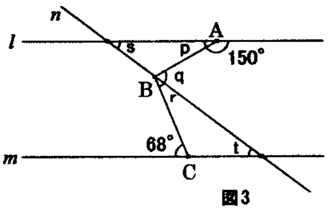



**図3**

【解法３】において補助線として引いた直線$n$は点Ｂを通る任意の直線なので、この直線が直線$l$と平行になった場合が【解法１】、線分ＡＢと平行（ここでは重なった）場合が【解法２】であると考えることができる。つまり【解法１】【解法２】は【解法３】の特殊な場合であり、これらの解法は「特殊と一般の関係」にあるといえる。すなわちここでは、【解法１】【解法２】を特殊な場合と捉えて、それらを一般化することによって【解法３】を見出したのである。

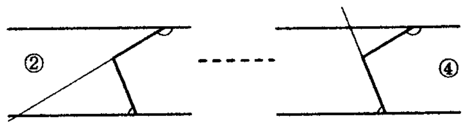
他にも多様な解法を引き出す手法としては「対の関係」に着目するという方法がある。例えば【解法２】の補助線は上側の線分ＡＢを延長させているが、それに対して下側の線分ＢＣの延長線を補助線とする解法（これを【解法４】とする）を見出すことができる。このとき、上側にある線分ＡＢに対し下側にある線分ＢＣは「対の関係」にあると捉えることができる。つまり【解法２】をもとにして「対の関係」から【解法４】を引き出したといえる。この【解法２】と【解法４】の関連をあらわした図が以下に示した**関連図１**である。「対の関係」を点線であらわしており、②が【解法２】に、④が【解法４】に対応している。

【解法３】においても、補助線が右下がりの直線であることに注目すると、それと「対の関係」にある右上がり直線を補助線にもつ【解法５】を見出すことができる。これらの関連も**関連図２**のようにあらわすことができる。点線は「対の関係」を示し、③は【解法３】、⑤は【解法５】に対応している。

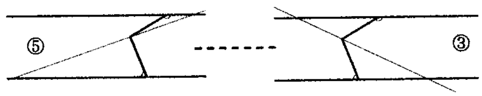
また「特殊と一般の関係」もそれを矢印などであらわすことによって関連図として示すことができる。例えば【解法２】の補助線である直線ＡＢは、点Ｂを通る任意の直線の特殊な場合と考えられることから、【解法２】は【解法５】の特殊な場合と捉えることができる。そこでこれらの解法の関連を**関連図３**のようにあらわすことができる。矢印は「特殊と一般の関係」を示し、②の【解法２】が⑤の【解法５】に含まれることをイメージしている。

同様に【解法４】と【解法３】においても「特殊と一般の関係」が成り立っているので、その関連も**関連図４**のようにあらわすことができる。④は【解法４】、③は【解法３】に対応している。

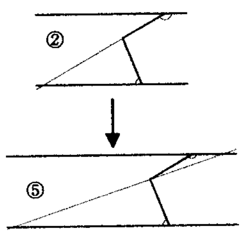
したがって【解法２】～【解法５】の関連は、**関連図５**のようにまとめてあらわすことができる。



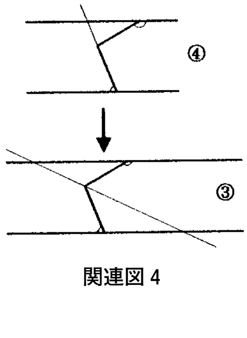

**関連図１**



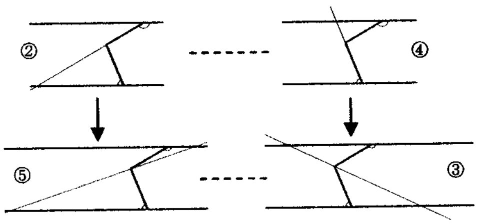

**関連図２**




**関連図３**




**関連図４**




関連図５

### ３．多様な解法の引き出し方

ここでさらに【解法３】をもとにして多様な解法を考えてみる。【解法３】の補助線は点Ｂを通る任意の直線なので、その特殊な場合として点Ｂを通り直線$l$に垂直な直線を補助線とする【解法６】を考えることができる。【解法６】では、平角・直角三角形の内角などの知識が用いられている。

**【解法6】図6のように点Bを通り直線$l$に垂直な直線$n$を引く．$p=180°-150°=30°$，△ABDと△CBEは直角三角形なので，$q=90°-p=60°$，$r=90°-68°=22°$，よって，$x=180°-q-r=180°-60°-22°=98°$**

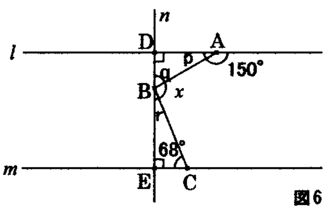



図6

【解法３】を見出す過程では、【解法１】【解法２】を特殊な場合とみてその一般化として【解法３】を見出したが、ここでは逆に【解法３】を一般の場合とみてその特殊化として【解法６】を見出している。

点Ｂを通る任意の直線を補助線とする【解法３】【解法５】の特殊な場合として【解法１】【解法２】【解法４】【解法６】を捉えることができるので、これらの解法は**関連図６**のようにまとめてあらわすことができる。

このような関連図を作成することによって、解法どうしの構造的な関係を把握することができる。こうした関連図を使って、教師側が解法を構造的に捉えておくと、個々の子どもが数学的手法をどこまでつかんでいるか、またどのような支援を行ったらよいかなどの判断がしやすくなる。

次に今度は【解法６】をもとにして、さらに多様な解法を考えてみる。【解法６】の補助線は、「点Ｂを通り直線$l$に垂直な直線」である。ここで例えば線分ＢＣの両端の点Ｂ、Ｃを「対の関係」にある２点と捉えれば、そこから「点Ｃを通り直線$l$に垂直な直線」を補助線とする解法（これを【解法７】とする）を見出すことができる。同様に線分ＡＢの両端の点Ａ、Ｂに着目すれば、「点Ａを通り直線$l$に垂直な直線」を補助線とする解法（これを【解法８】とする）を見出すことができる。このように「対の関係」をもとにして、【解法６】から【解法７】や【解法８】などを見出すことができる。**関連図７**は【解法６】～【解法８】の関連を示した図である。⑥は【解法６】、⑦は【解法７】、⑧は【解法８】に対応している。

さらにこの【解法６】【解法７】【解法８】を特殊な場合とみて、その一般化を図ると、「直線$l$に垂直な任意の直線」を補助線とする【解法９】のような解法が見出される。

**【解法9】図9のように直線$l$に垂直である任意の直線$n$を引く．直線BA,BCとの交点をD,Gとする．△ADEは直角三角形であり内角と外角の関係から，$p=150°-90°=60°$，また，$q=68°$(対頂角)．△CGFも直角三角形であるから，$r=90°-q=90°-68°=22°$，よって，△BGDの内角の和に注目すると，$x=180°-p-r=180°-60°-22°=98°$**

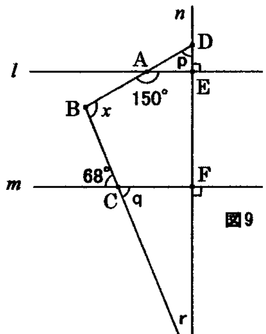
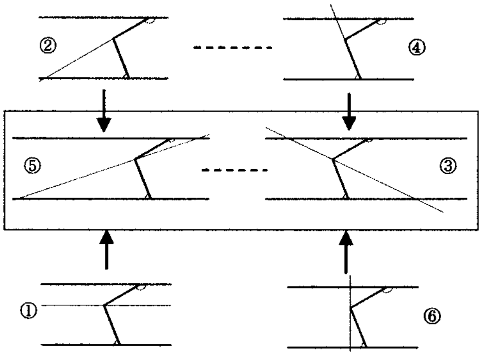



図9

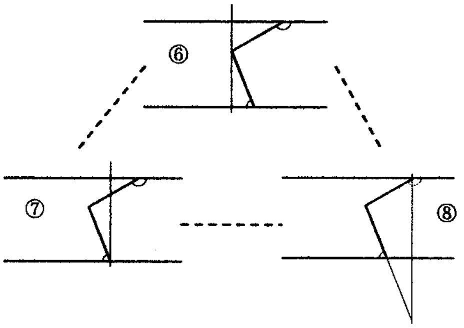
ここでは「直線$l$に垂直な任意の直線」を補助線として引いているが、この補助線の引かれている位置によって、解法をいくつかの場合に分けることができる。例えば**関連図８**のように⑨⑩⑪⑫に対応した【解法９】【解法10】【解法11】【解法12】の関連を見出すことができる。**関連図８**では、補助線が線

分ＡＢ（または線分ＢＣ）と交点をもつかもたないか、あるいは線分ＡＢ（または線分ＢＣ）のどちら側の延長線上と交わっているかなどにより、それぞれの解法が「対の関係」として関連付けられている。

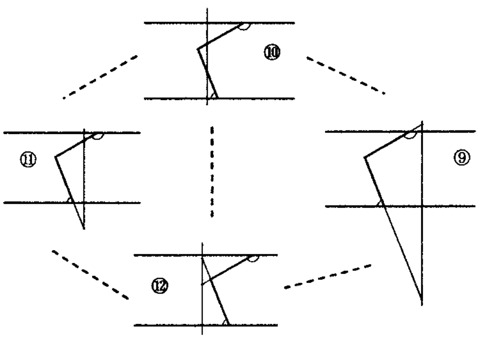
またさらに【解法６】～【解法８】は【解法９】～【解法12】の特殊な場合と考えられるので、これらの解法は**関連図９**のようにまとめることができる。



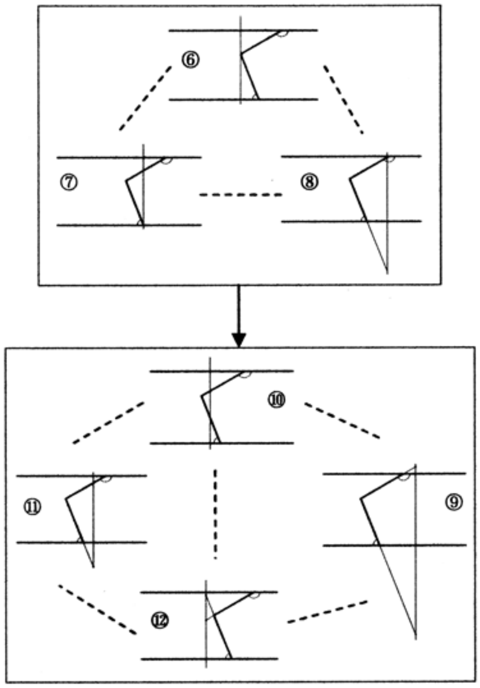

関連図６




関連図７




関連図８




関連図９

**4．視点を変えてさらに多様な解法を引き出す**

他にも【解法２】の補助線を「点Ｂを通り線分ＡＢに平行な直線」と捉え、線分ＢＣの両端の点Ｂ、Ｃを「対の関係」とみなすと、そこから「点Ｃを通り直線ＡＢに平行な直線」を補助線とする【解法13】を見出すことができる。

**【解法 13】** 図 13 のように点 C を通り AB に平行な直線 $n$ を引く．p =150°(平行線の同位角)，　p =q =150°(平行線の同位角)，　r =180°−q =180°−150°=30°，よって，$x$ = r +68°=30°+68°=98°(平行線の錯角)

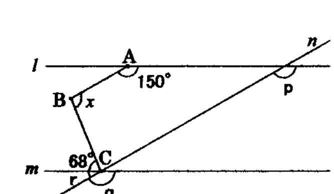
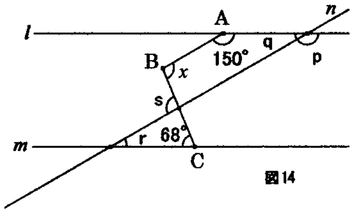



図13

ここでさらに【解法２】と【解法13】を特殊な場合として、その一般化を図ることによって【解法14】のような解法を見出すことができる。

**【解法 14】** 図 14 のように AB に平行で BC と交わる任意な直線 $n$ を引く．p=150°(平行線の同位角)，q =180° −p =180°−150°=30°，r = q =30°(平行線の錯角)，s = r +68°=30°+68°=98°，よって，$x$ = s =98°(平行線の錯角)



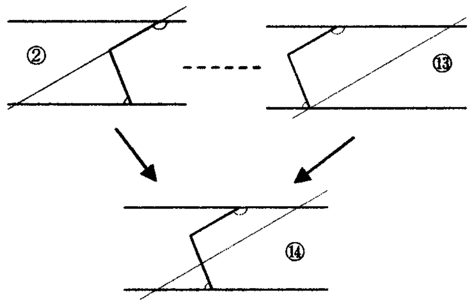

ここでは【解法２】をもとにして､「対の関係」から【解法13】､「特殊と一般の関係」から【解法14】を引き出したので､これらの解法の関連は**関連図10**のようにあらわすことができる。

また【解法４】をもとにしても同様に考えることができ､「対の関係」から引き出した解法を【解法15】､「特殊と一般の関係」から引き出した解法を【解法16】とするとこれらの解法の関連も**関連図10**と同じ様にあらわすことができる。**関連図11**は､【解法２】【解法４】【解法13】【解法14】【解法15】【解法16】の関連をまとめて示したものである。②は【解法２】､④は【解法４】､⑬は【解法13】､⑭は【解法14】､⑮は【解法15】､⑯は【解法16】に対応している。

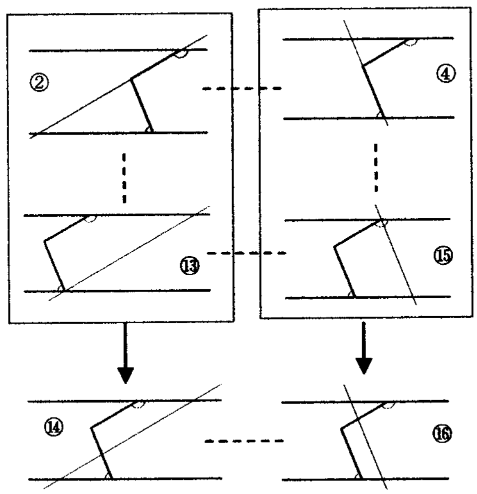
また【解法14】では「線分ＡＢに平行な任意の直線」を補助線として引いているが、ここでもこの補助線の引かれている位置によって、解法をいくつかの場合に分けることができる。例えば**関連図12**のように⑭⑰⑱⑲に対応した【解法14】【解法17】【解法18】【解法19】の関連を見出すことができる。**関連図12**では､補助線と直線ＢＣとの交点の位置などによって、それぞれの解法が「対の関係」として関連付けられている。

【解法16】でも**関連図12**と同じ様な関連図を作成することができ､【解法16】と関連した【解法20】【解法21】【解法22】を見出すことができる。(この関連図は略す。)

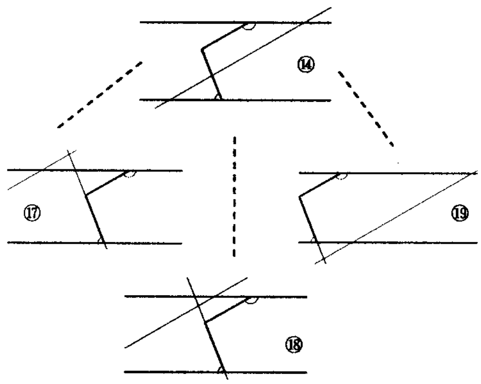
こうした多くの解法の存在を確認しておくことによって、ちょっとした子どものアイデアも解法に結び付けて生かしてやれる可能性を高めることができる。また多くの解法との比較から、はじめの【解法１】【解法２】がよりスマートな解法であることもわかる。




**関連図10**




**関連図11**




**関連図12**

## ５．まとめ

ここで扱ったのは、ごくありふれた高校入試問題であったが、このように「一通りではなく、いろいろな求め方を考えよ」という文言を付け加え、数学的手法を指導内容として組み込むことによって、多様な解法を引き出す教材として開発することができる。「対の関係」や「特殊と一般の関係」に着目させることにより、解法を関連付けて構造的に把握させ、多様な解法を引き出させることで、子どもの学習観の変容を図りたいと考えている。

なお、この多様な解法を引き出す数学的手法に関する研究においては、数学者黒木伸明氏（上越教育大学名誉教授）から多くの示唆をいただいた。